

## CONSIDERAÇÕES SOBRE O USO DA RIGIDEZ EQUIVALENTE PARA VIGAS E PILARES NAS ANÁLISES NÃO-LINEARES EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Mônica Maria Emerenciano Bueno<sup>1</sup>  
Guilherme Sales Soares de Azevedo Melo<sup>2</sup>

**Resumo:** Este trabalho tem como objetivo estudar a aplicação em projetos da rigidez equivalente de vigas e pilares de pórtico com o intuito de simular a não-linearidade física para análises de segunda ordem global em estruturas de concreto armado. Para este estudo foi desenvolvido um exemplo analítico de um edifício apresentando o passo a passo do processo de cálculo utilizado nas análises.

**Palavras-chave:** Não-linearidade física. análise não-linear aproximada. rigidez.

---

### Introdução

A avaliação da sensibilidade das estruturas aos efeitos de segunda ordem global é obrigatória, sejam elas de pequena ou grande complexidade. Esta consideração está cada vez mais inserida na realidade dos escritórios de projeto e isso se deve ao desenvolvimento dos sistemas computacionais, que vêm evoluindo de forma significativa e são influenciados diretamente pela incorporação desses tipos de análises em seus processamentos.

O comportamento não-linear é aquele caracterizado por uma relação de não-linearidade entre o carregamento aplicado e a resposta estrutural. Na análise de estruturas de concreto armado o material apresenta uma relação não-linear entre tensões e deformações e a estrutura em questão sofre uma mudança de posição no espaço que influencia nos deslocamentos finais e esta influência será maior quanto mais alto for o nível de carregamento atuante. Pode ser introduzido nas análises de forma simplificada ou refinada e de acordo com a NBR6118:2014 deve ser obrigatoriamente considerado. O comportamento não-linear é aquele caracterizado por uma relação de não-linearidade entre o carregamento aplicado e a resposta estrutural. O resultado considerando esses dois aspectos é que a resposta encontrada será diferente daquela obtida por processamento elástico-linear.

---

<sup>1</sup> Professor, Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Goiás; Doutor;  
[mo.bueno@gmail.com](mailto:mo.bueno@gmail.com)

<sup>2</sup> Professor, Universidade de Brasília; Doutor; [melog@unb.br](mailto:melog@unb.br)

## **Não-linearidades**

Os efeitos não-lineares podem ser divididos quanto à sua natureza em efeitos devidos à mudança de posição da estrutura no espaço, denominados não-linearidade geométrica (NLG) e aqueles referentes ao comportamento do material, conhecidos por não-linearidade física (NLF). Cada um colabora com uma parcela no comportamento não-linear, no entanto estes não podem ser separados pois atuam de forma conjunta e são intrínsecos à resposta estrutural.

Análises não-lineares são essencialmente métodos de cálculo iterativos, devido à natureza dos problemas, tanto a NLF quanto a NLG são alteradas de acordo com o nível de tensão atuante e este se modifica ao longo da análise.

Apesar do uso cada vez mais incorporado aos processos de cálculo de análises não-lineares, métodos simplificados bem fundamentados foram desenvolvidos e testados durante muito tempo e ainda são bastante aplicados como alternativa a análises rigorosas, desde que respeitadas suas limitações. Na NBR 6118:2014 o processo aproximado para avaliar os efeitos de segunda ordem globais utilizando o  $\gamma_z$ , coeficiente que relaciona o momento de tombamento (primeira ordem) da estrutura com o momento devido ao carregamento aplicado na mesma já com os deslocamentos horizontais, é uma forma de cálculo simplificada indicada que sinaliza se a edificação deve levar em conta esses efeitos na análise estrutural. Nas análises aproximadas utiliza-se métodos simplificados para a não-linearidade geométrica nos quais é essencial que se faça uma previsão correta da influência da não-linearidade física dos elementos componentes, ou seja, é preciso levar em conta a perda de rigidez da estrutura devido ao comportamento não-linear dos materiais. Quanto mais próximo o valor adotado esteja da rigidez efetiva da estrutura, mais precisos serão os resultados.

Estes processos simplificados para análise não-linear são de extrema utilidade prática para o projeto de edifícios em concreto armado, desde que se conheça seus respectivos campos de aplicação e sua precisão, uma vez que agilizam o desenvolvimento do projeto estrutural sem perda significativa na precisão dos resultados. Mesmo diante da facilidade que os processamentos computacionais oferecem atualmente, os métodos aproximados para consideração das não-linearidades continuam desempenhando um papel importante no desenvolvimento de projetos na engenharia, fornecendo bons resultados em análises iniciais de

lançamento estrutural em relação ao seu comportamento quanto aos efeitos de segunda ordem.

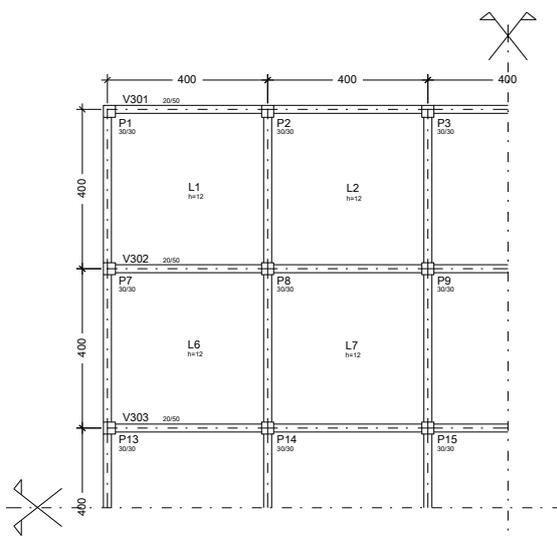
### **Edifício Exemplo**

Para verificar as considerações de não-linearidades no cálculo de estruturas reticuladas dentro da análise estrutural foi desenvolvido um exemplo de uma estrutura simples, modelada utilizando pórticos planos associados para combinações de carregamentos e considerações de rigidez do Estado Limite Último.

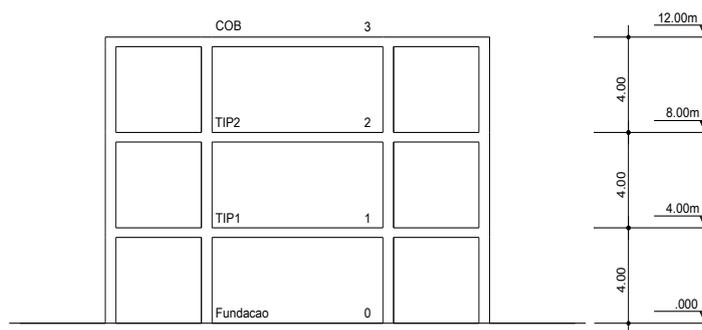
Os cálculos iniciais de carregamentos, suas combinações e avaliação da estabilidade global foram realizados utilizando planilhas eletrônicas e para determinação dos esforços solicitantes internos foi usado o software educacional Ftool- Two Dimensional Frame analysis, versão 2.12, desenvolvido por Luiz Fernando Martha, da PUC Rio, por proporcionar análises estruturais com pórticos planos.

### **Descrição do Edifício**

O edifício adotado nas análises foi o Edifício Exemplo, cuja planta baixa está representada na Figura 1. Trata-se de uma edificação de uso comercial composta por um pavimento-tipo com duas repetições e uma cobertura. Todos os níveis possuem a mesma planta de forma e as distâncias de piso a piso são constantes e iguais a 4,00m, resultando na altura total de 12,00m, como indicado no corte esquemático da Figura 2.



**Figura 1-** Detalhe em planta do Edifício Exemplo, dimensões em centímetros



**Figura 2-** Corte esquemático do Edifício Exemplo

### **Critérios Gerais**

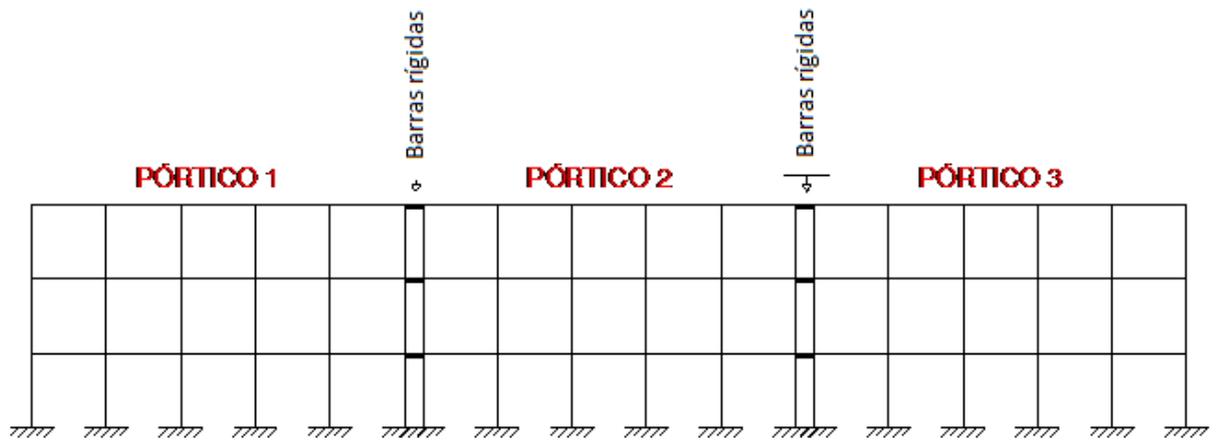
Os critérios importantes pressupostos na análise e dimensionamento são:

Todos os elementos da edificação são de concreto armado com  $f_{ck} = 25MPa$  e aço CA-50;

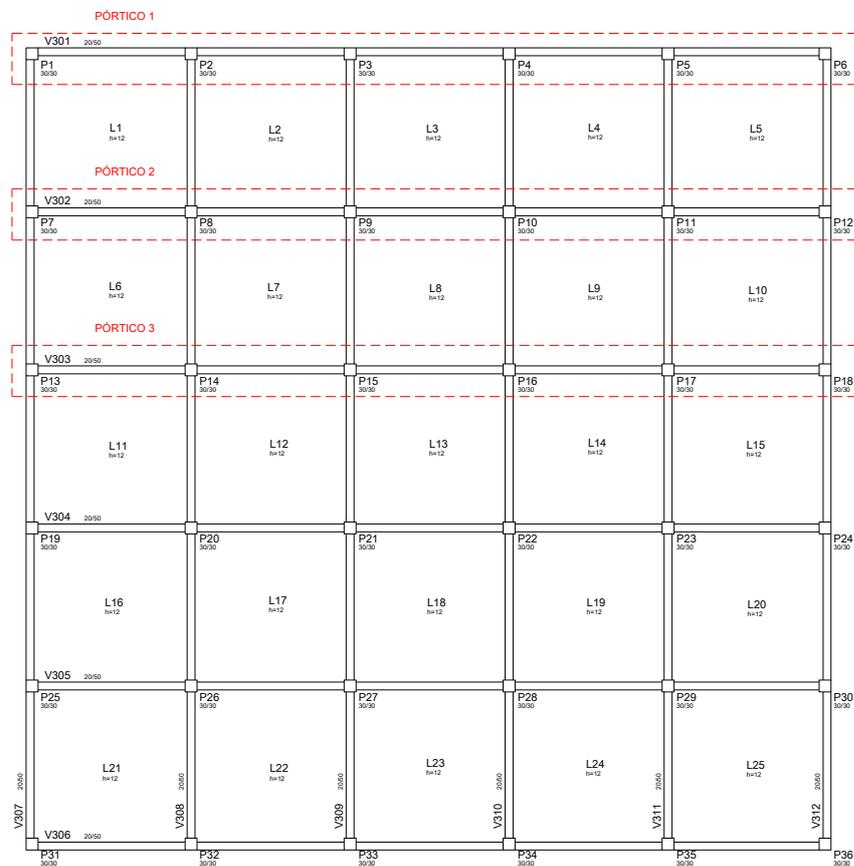
O módulo de elasticidade do concreto considerado corresponde a  $E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}} MPa$ .

### **Modelo Estrutural**

A estrutura foi modelada utilizando pórticos planos associados, ligados entre si por barras rígidas que tem apenas a função de compatibilizar os deslocamentos horizontais em cada nível entre os pórticos. Esta solução foi utilizada devido às suas características de simetria, tanto geométrica quanto de carregamentos e pela possibilidade de realizar análise conjunta de cargas verticais e horizontais de forma eficiente. Os pilares foram considerados engastados na base da edificação e, devido à simetria, o modelo utilizado possui apenas 3 pórticos como apresentado nas Figuras 3 e 4.



**Figura 3-** Modelo de pórticos planos associados utilizado no Edifício Exemplo



**Figura 4- Identificação em planta dos pórticos representados no modelo de análise estrutural**

## Carregamento

As cargas verticais adotadas foram compostas por parcelas permanentes e acidentais de acordo com as características e com o uso do pavimento e determinadas para cada tipo de elemento estrutural.

Para determinar o carregamento de vento atuante no Edifício Exemplo foram utilizados os dados apresentados na Tabela 1.

**Tabela 1- Dados utilizados para a determinação do carregamento de vento**

Parâmetro	Descrição	Valor utilizado	
$V_0$	Velocidade básica do vento	35 m/s	Cidade de Brasília
$S_1$	Fator topográfico	1,00	Terreno plano
$S_2$	Rugosidade do terreno	Categoria III	Terreno plano com obstáculos
	Dimensões da edificação	Classe A	Edificação com a maior dimensão até 20m
	$S_2 = 0,94 \cdot 1,0 \cdot (z/10)^{0,1}$	Por trecho	Calculado para cada altura (z) do pavimento
$S_3$	Fator estatístico	1,00	Edifício comercial com alto fator de ocupação
Cax e Cay	Coeficiente de arrasto para cada direção	1,04	Do ábaco para vento de baixa turbulência: $\begin{cases} L_1/L_2 = 1,00 \\ h/L_1 = 0,6 \end{cases}$

Foi considerado também carregamento horizontal provocado pelo desaprumo dos elementos verticais utilizando os dados: altura total da edificação de  $H=12\text{m}$ , número de prumada de pilares  $n=6$  e valor adotado para  $\theta_{1,\min}$  é referente a estruturas de nós móveis. Como  $\theta_1 < \theta_{1,\min}$   $\theta_1 = 1/300 = 0,0033$ , para o cálculo de  $\theta_a$ .

Os efeitos das imperfeições geométricas das estruturas de contraventamento podem ser considerados através da aplicação de forças horizontais  $\Delta H_i = \theta_a \cdot F_{vi}$  nos diversos níveis da estrutura, onde  $F_{vi}$  é a força vertical total introduzida no andar  $i$  do edifício.

Segundo a NBR 6118:2014 o desaprumo e o vento não devem ser superpostos nas análises globais. Entre os dois deve ser considerado apenas o mais desfavorável, que pode ser definido através do que provoca o maior momento total na base de construção. Para isso, foi realizada análise comparativa dos momentos gerados na base da edificação (Tabela 2) concluindo que o vento é o mais desfavorável e por isso ele foi utilizado como carregamento horizontal aplicado ao Edifício Exemplo.

**Tabela 2- Cálculo dos momentos na base do Edifício Exemplo em função dos carregamentos horizontais de vento e desaprumo global**

TRECHOS	$z_i$ [m]	Vento		Desaprumo	
		F [kN]	$M_{eq}$ [kNm]	$\Delta H_i$ [kN]	$M_{eq}$ [kNm]
Térreo	0,00	23,44	0,00	13,01	0,00
1	4,00	46,88	187,52	13,01	52,04
2	8,00	53,84	430,72	13,01	104,08
3	12,00	29,18	350,16	10,49	125,88
		$\Sigma M_{base}$	<b>968,40</b>	$\Sigma M_{base}$	<b>282,00</b>

### Combinações de Carregamento

Após a definição das ações atuantes na estrutura foram definidas duas combinações últimas normais a fim de considerar a atuação simultânea dos carregamentos horizontal e vertical.

Foi considerada a formulação de segurança apresentada em 15.3.1 da NBR 6118:2014 em que se calculam os efeitos de segunda ordem das cargas majoradas de  $\gamma_f / \gamma_{f3}$ , que posteriormente são majorados de  $\gamma_{f3}$ , com  $\gamma_{f3} = 1,1$ .

Para o Edifício Exemplo os casos de carregamento utilizados estão apresentados nas equações 1 e 2, respectivamente Combinação 1 e Combinação 2.

$$S_{d,tot} = 1,1 \cdot S \left( \frac{1,4}{1,1} \cdot F_{gk} + \frac{1,4}{1,1} \cdot F_{q1k} + \frac{1,4}{1,1} \cdot 0,6 \cdot F_{q2k} \right) \quad (1)$$

$$S_{d,tot} = 1,1 \cdot S \left( \frac{1,4}{1,1} \cdot F_{gk} + \frac{1,4}{1,1} \cdot 0,7 \cdot F_{q1k} + \frac{1,4}{1,1} \cdot F_{q2k} \right) \quad (2)$$

Onde  $F_{q1k}$  representa as ações de sobrecarga e  $F_{q2k}$  a ação do vento.

### Análise da Estabilidade Global

A avaliação da estabilidade global da estrutura foi realizada através do coeficiente  $\gamma_z$ . Ele foi determinado a partir dos resultados da análise linear de primeira ordem da estrutura para cada caso de carregamento, adotando-se os valores de rigidez indicados na NBR 6118:2014 para estruturas reticuladas de no mínimo quatro andares:

$$\text{Vigas: } (EI)_{sec} = 0,4E_{ci}I_c; \text{ Pilares: } (EI)_{sec} = 0,8E_{ci}I_c.$$

Apesar destes valores não serem indicados para estruturas com 3 pavimentos, eles foram utilizados como valores iniciais para a análise iterativa realizada a seguir. A Tabela 3 apresenta os cálculos realizados para determinação do  $\gamma_z$  considerando a Combinação 1, assim como a Tabela 4 apresenta a Combinação 2.

**Tabela 3-** Cálculo de  $\gamma_z$  para a Combinação 1

Combinação 1									
TRECHOS	zi [m]	1 ordem			2 ordem				
		F <sub>H,k</sub> [kN]	M <sub>1k</sub> [kNm]	M <sub>1d</sub> [kNm]	F <sub>V,d</sub> [kN]	Desl. <sub>h</sub> [m]	M <sub>2d</sub> [kNm]		
Térreo	0.00	23.43	0.00	0.00	7154.98	0.00000	0.00		
1	4.00	46.86	187.44	157.45	7154.98	0.00135	9.66		
2	8.00	53.83	430.64	361.74	7154.98	0.00255	18.25		
3	12.00	29.19	350.28	294.24	5767.19	0.00308	17.76		
				$\Sigma M_{base}$	813.42			$\Sigma M_{base}$	45.67

$\gamma_z$	1.06
------------	------

**Tabela 4-** Cálculo de  $\gamma_z$  para a Combinação 2

Comb2									
TRECHOS	zi [m]	1 ordem			2 ordem				
		F <sub>H,k</sub> [kN]	M <sub>1k</sub> [kNm]	M <sub>1d</sub> [kNm]	F <sub>V,d</sub> [kN]	Desl. <sub>h</sub> [m]	M <sub>2d</sub> [kNm]		
Térreo	0,00	23,43	0,00	0,00	6650,98	0,00000	0,00		
1	4,00	46,86	187,44	262,42	6650,98	0,00225	14,96		
2	8,00	53,83	430,64	602,90	6650,98	0,00425	28,27		
3	12,00	29,19	350,28	490,39	5274,98	0,00513	27,06		
				$\Sigma M_{base}$	1355,70			$\Sigma M_{base}$	70,29

$\gamma_z$	1,05
------------	------

Pelos valores de  $\gamma_z$  encontrados, pode-se concluir que o Edifício Exemplo é de nós fixos.

Foi realizada também a análise  $P-\Delta$  do Edifício Exemplo por ser um processo mais refinado de consideração na NLG. Ele consiste em um cálculo iterativo que em suas etapas transforma o efeito dos deslocamentos sucessivos em forças horizontais equivalentes  $\Delta H_i$ . No entanto a consideração da NLF também é feita

através da redução da rigidez e os valores  $0,4E_{ci}I_c$  para vigas e  $0,8E_{ci}I_c$  para pilares foram adotados novamente, assim como no cálculo do  $\gamma_z$ .

O critério de parada definido foi o de incremento nos valores de deslocamento encontrados. O processo é finalizado quando o acréscimo determinado em uma iteração seja menor do que 0,05cm. Os resultados encontram-se nas Tabelas 5,6 e 7.

**Tabela 5-** Análise  $P - \Delta$ : Valores de  $\Delta H_i$  para a primeira iteração

Análise inicial							
Comb1							
Andar	Nó	$u_i$ [m]	$\Delta u$ [m]	$F_i$ [kN]	$H_i$ tot [kN]	$\Delta H_i$ pórtico [kN]	
3	64	0,002798	0,000478	4119,42	0,4923	0,2461	
2	46	0,002320	0,001090	9230,12	2,5152	1,0115	
1	28	0,001230	0,001230	14340,82	4,4098	0,9473	
Térreo	6	0,000000	-	-		0,0000	
h=		4,00 m					
Comb2							
Andar	Nó	$u_i$ [m]	$\Delta u$ [m]	$F_i$ [kN]	$H_i$ tot [kN]	$\Delta H_i$ pórtico [kN]	
3	64	0,004665	0,000797	4119,42	0,8208	0,4104	
2	46	0,003868	0,001819	9230,12	4,1974	1,6883	
1	28	0,002049	0,002049	14340,82	7,3461	1,5743	
Térreo	6	0,000000	-	-		0,0000	

**Tabela 6-** Análise  $P-\Delta$ : Valores de  $\Delta H_i$  para a segunda iteração

1ª iteração						
Comb1						
Andar	Nó	$u_i$ [m]	$\Delta u$ [m]	$F_i$ [kN]	$H_i$ tot [kN]	$\Delta H_i$ pórtico [kN]
3	64	0,002910	0,000493	4119,42	0,5077	0,2539
2	46	0,002417	0,001134	9230,12	2,6167	1,0545
1	28	0,001283	0,001283	14340,82	4,5998	0,9915
Térreo	6	0,000000	-	-		0,0000
h=		4,00	m			
Comb2						
Andar	Nó	$u_i$ [m]	$\Delta u$ [m]	$F_i$ [kN]	$H_i$ tot [kN]	$\Delta H_i$ pórtico [kN]
3	64	0,004851	0,000821	4119,42	0,8455	0,4228
2	46	0,004030	0,001892	9230,12	4,3658	1,7602
1	28	0,002138	0,002138	14340,82	7,6652	1,6497
Térreo	6	0,000000	-	-		0,0000

**Tabela 7-** Análise  $P-\Delta$ : Valores de  $\Delta H_i$  para a terceira iteração

2ª iteração						
Comb1						
Andar	Nó	$u_i$ [m]	$\Delta u$ [m]	$F_i$ [kN]	$H_i$ tot [kN]	$\Delta H_i$ pórtico [kN]
3	64	0,002915	0,000494	4119,42	0,5087	0,2544
2	46	0,002421	0,001135	9230,12	2,6190	1,0551
1	28	0,001286	0,001286	14340,82	4,6106	0,9958
Térreo	6	0,000000	-	-		0,0000
h=		4,00	m			
Comb2						
Andar	Nó	$u_i$ [m]	$\Delta u$ [m]	$F_i$ [kN]	$H_i$ tot [kN]	$\Delta H_i$ pórtico [kN]
3	64	0,004820	0,000809	4119,42	0,8332	0,4166
2	46	0,004011	0,001880	9230,12	4,3382	1,7525
1	28	0,002131	0,002131	14340,82	7,6401	1,6510
Térreo	6	0,000000	-	-		0,0000

O processo foi finalizado na segunda iteração, pois os incrementos nos deslocamentos da primeira para a segunda iteração foram muito pequenos, menores que o valor estabelecido como critério de parada.

## Dimensionamento da Estrutura

Para determinar a rigidez das peças é necessário realizar o dimensionamento da estrutura e chegar às armações finais de todos os elementos, considerando para isto a envoltória de carregamentos, pois dessa forma as armaduras encontradas atendem a todas as combinações possíveis de carregamentos externos. Nos casos de estruturas com geometria e carregamento simétricos (como o Edifício Exemplo) a envoltória gerada tem forma simétrica, pois o diagrama de esforços para o vento em um sentido e no sentido contrário também apresentam resultados simétricos.

Nesta etapa foram utilizados os resultados do processamento não-linear geométrico pelo processo  $P-\Delta$  já realizado e a NLF foi levada em conta através da redução de rigidez da NBR6118:2014.

O resultado da taxa de armadura média do dimensionamento de vigas está apresentado nas tabelas 8 e 9. Para definição de  $\rho_{medio}$  utilizou-se a equação 3 (CRESPO, 2002) que será necessária na determinação da rigidez equivalente de vigas da estrutura.

$$\rho_{medio} = 0,15\rho_A + 0,15\rho_B + 0,70\rho_C$$

( **Erro!**  
**Nenhum texto com**  
**o estilo especificado**  
**foi encontrado no**  
**documento.**)

Sendo  $\rho_A$  e  $\rho_B$  as taxas de armadura referentes aos extremos de cada vão das vigas e  $\rho_C$  a taxa de armadura referente ao meio do vão.

**Tabela 8-** Resultado dos processamentos para as vigas dos pavimentos tipo

V01/V06/ V07 / V12							
VÃO		1		2 / 3/ 4		5	
$\rho_A$	$\rho_B$	0,16%	0,24%	0,24%	0,24%	0,24%	0,16%
$\rho_C$		0,16%		0,16%		0,16%	
$\rho_{medio}$		0,17%		0,18%		0,17%	

V02/V03/ V04/ V05/ V08/ V09/ V10/ V11							
VÃO		1		2 / 3/ 4		5	
$\rho_A$	$\rho_B$	0,24%	0,31%	0,31%	0,31%	0,31%	0,24%
$\rho_C$		0,16%		0,16%		0,16%	
$\rho_{medio}$		0,19%		0,20%		0,19%	

**Tabela 9-** Resultado dos processamentos para as vigas da cobertura

V401/V406/ V407 / V412							
VÃO		1		2 / 3/ 4		5	
$\rho_A$	$\rho_B$	0,16%	0,16%	0,16%	0,16%	0,16%	0,16%
$\rho_C$		0,16%		0,16%		0,16%	
$\rho_{medio}$		0,16%		0,16%		0,16%	

V402/V403/ V404/ V405/ V408/ V409/ V410/ V411							
VÃO		1		2 / 3/ 4		5	
$\rho_A$	$\rho_B$	0,16%	0,24%	0,24%	0,24%	0,24%	0,16%
$\rho_C$		0,16%		0,16%		0,16%	
$\rho_{medio}$		0,17%		0,18%		0,17%	

O dimensionamento de pilares também foi realizado considerando a flexão composta oblíqua e os resultados encontram-se na tabela a seguir.

**Tabela 10-** Dimensionamento dos pilares do Edifício Exemplo

	P1/.../P6/P8/.../P11/P14/.../P17/P20/.../ P23/P26/.../P29/P31/.../P36	P7/ P12/ P13/ P18/ P19/ P24/ P25/ P30
Lance 1	4 $\phi$ 12,5	4 $\phi$ 12,5
Lance 2	4 $\phi$ 12,5	4 $\phi$ 12,5
Lance 3	4 $\phi$ 12,5	4 $\phi$ 16

## Determinação da Rigidez Equivalente

Para obter valores de rigidez equivalente serão aplicados nas vigas e pilares do Edifício Exemplo as equações sugeridas no trabalho de Crespo (2002) e Oliveira (2004), que se baseiam na norma brasileira.

Crespo (2002) apresenta uma relação entre a taxa de armadura média ( $\rho_{medio}$ ) e valores de redução de rigidez para tramos de vigas. Em seus estudos a autora concluiu que é preferível trabalhar com valores variáveis de redução de rigidez de vigas do que um único valor para o espectro de vigas usuais. Ela indica como proposta final o valor de  $\alpha_{eq} = 0,3$  para  $\rho_c < 0,75\%$  e um valor que varia de  $\alpha_{eq} = 0,3$  a  $0,7$  para  $0,75\% \leq \rho_c \leq 2,55\%$ , sendo  $\rho_c$  a taxa de armadura de tração no meio do vão.

Utilizando os resultados de Crespo (2002) e considerando que a taxa média de armadura das vigas do Edifício Exemplo variou entre  $0,16\%$  e  $0,20\%$ , o valor indicado para a redução de rigidez  $\alpha$  é  $\alpha_{eq} = 0,3$ .

A rigidez média de pilar foi calculada utilizando os ábacos de Oliveira (2004) através de  $\kappa$ . Para as características geométricas dos pilares do Edifício Exemplo utilizou-se o ábaco B10 e os resultados estão na tabela 11.

**Tabela 11-** Cálculo da rigidez média utilizando os ábacos de Oliveira (2004)

PILAR	Lance	Seção	b	h	d'	d'/h	N. de barras	f	n	m	w	k	$EI_{cs}$ [kNm <sup>2</sup> ]	$EI_{ci}$ [kNm <sup>2</sup> ]	$EI_{cs}/EI_{ci}$
P1/ P6/ P31/ P36	1	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,2	0,02	0,1	25	3616,07	18900,00	0,19
	2	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,1	0,04	0,1	20	2892,86	18900,00	0,15
	3	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,0	0,03	0,1	20	2892,86	18900,00	0,15
P2/ P5/ P32/ P35	1	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,3	0,04	0,1	35	5062,50	18900,00	0,27
	2	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,2	0,03	0,1	25	3616,07	18900,00	0,19
	3	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,1	0,01	0,1	20	2892,86	18900,00	0,15
P3/ P4/ P33/ P34	1	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,3	0,04	0,1	35	5062,50	18900,00	0,27
	2	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,2	0,03	0,1	25	3616,07	18900,00	0,19
	3	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,1	0,01	0,1	20	2892,86	18900,00	0,15
P7/ P12/ P25/ P30	1	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,2	0,05	0,1	25	3616,07	18900,00	0,19
	2	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,2	0,05	0,1	25	3616,07	18900,00	0,19
	3	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,1	0,06	0,1	20	2892,86	18900,00	0,15
P8/ P11/ P26/ P29	1	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,5	0,07	0,1	60	8678,57	18900,00	0,46
	2	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,3	0,05	0,1	35	5062,50	18900,00	0,27
	3	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,2	0,02	0,1	25	3616,07	18900,00	0,19
P9/ P10/ P27/ P28	1	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,5	0,07	0,1	60	8678,57	18900,00	0,46
	2	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,3	0,04	0,1	35	5062,50	18900,00	0,27
	3	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,1	0,02	0,1	20	2892,86	18900,00	0,15
P13/ P18/ P19/ P24	1	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,2	0,05	0,1	25	3616,07	18900,00	0,19
	2	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,2	0,05	0,1	25	3616,07	18900,00	0,19
	3	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,1	0,06	0,1	20	2892,86	18900,00	0,15
P14/ P17/ P20/ P23	1	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,5	0,07	0,1	60	8678,57	18900,00	0,46
	2	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,3	0,04	0,1	35	5062,50	18900,00	0,27
	3	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,1	0,02	0,1	20	2892,86	18900,00	0,15
P15/ P16/ P21/ P22	1	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,5	0,07	0,1	60	8678,57	18900,00	0,46
	2	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,3	0,04	0,1	35	5062,50	18900,00	0,27
	3	B10	30	30	3,00	0,10	4	1,25	0,1	0,02	0,1	20	2892,86	18900,00	0,15

De acordo com os trabalhos de Khuntia e Ghosh (2004a) e (2004b) nos quais o ACI 318:11 está baseado, a determinação da rigidez equivalente depende dos fatores taxa de armadura e relação  $b/d$  para vigas e da taxa de armadura, relação  $e/h$  e taxa de carregamento axial  $P_u/P_0$  para os pilares. Para efeito de comparação os resultados das equações propostas nos trabalhos destes autores foram calculados para o Edifício Exemplo e estão apresentados nas tabelas a seguir. Porém foi feita uma adaptação na determinação da carga última de pilares, pois se utilizou as bases da norma brasileira para seu cálculo.

**Tabela 12-** Determinação da rigidez equivalente de vigas de acordo com Khuntia e Ghosh (2004a)

VIGA	PAVIMENTO	$\rho_{critico}$		$b/d$	$EI_e/E_c I_g$
		+	-		
01/06/07/12	TIPO	0,16%	0,24%	0,43	0,17
02/03/04/05/ 08/09/10/11	TIPO	0,16%	0,31%	0,43	0,18
01/06/07/12	COB	0,16%	0,16%	0,43	0,16
02/03/04/05/ 08/09/10/11	COB	0,16%	0,24%	0,43	0,17

**Tabela 13-** Determinação da rigidez equivalente de pilares de acordo com Khuntia e Ghosh (2004a)

PILAR	LANCE	$\rho_g$	$e/h$	$P_u$ [kN]	$P_0$ [kN]	$P_u/P_0$	$EI_e/E_c I_g$
P1/ P6/ P31/ P36	1	0,55%	0,20	250	1570	0,16	0,58
	2	0,55%	0,32	154	1570	0,10	0,50
	3	0,55%	0,69	58	1570	0,04	0,23
P2/ P5/ P32/ P35	1	0,55%	0,13	468	1570	0,30	0,58
	2	0,55%	0,12	297	1570	0,19	0,63
	3	0,55%	0,12	128	1570	0,08	0,67
P3/ P4/ P33/ P34	1	0,55%	0,12	459	1570	0,29	0,59
	2	0,55%	0,12	293	1570	0,19	0,63
	3	0,55%	0,12	127	1570	0,08	0,67
P7/ P12/ P25/ P30	1	0,55%	0,13	400	1570	0,25	0,60
	2	0,55%	0,23	251	1570	0,16	0,56
	3	0,89%	0,76	97	1694	0,06	0,17
P8/ P11/ P26/ P29	1	0,55%	0,11	812	1570	0,52	0,50
	2	0,55%	0,11	527	1570	0,34	0,58
	3	0,55%	0,12	245	1570	0,16	0,65
P9/ P10/ P27/ P28	1	0,55%	0,12	798	1570	0,51	0,50
	2	0,55%	0,12	520	1570	0,33	0,58
	3	0,55%	0,12	241	1570	0,15	0,65
P13/ P18/ P19/ P24	1	0,55%	0,13	398	1570	0,25	0,60
	2	0,55%	0,21	250	1570	0,16	0,57
	3	0,89%	0,78	98	1694	0,06	0,15
P14/ P17/ P20/ P23	1	0,55%	0,12	772	1570	0,49	0,51
	2	0,55%	0,11	501	1570	0,32	0,58
	3	0,55%	0,11	234	1570	0,15	0,65
P15/ P16/ P21/ P22	1	0,55%	0,11	762	1570	0,49	0,52
	2	0,55%	0,11	496	1570	0,32	0,58
	3	0,55%	0,12	230	1570	0,15	0,65

Khuntia e Ghosh (2004a) recomendam na conclusão de seu trabalho que as análises de primeira e segunda ordem de pórticos devem ser inicialmente feitas

considerando  $0,35EI$  para vigas e  $0,70EI$  para pilares, o que corresponde a vigas com 1% de taxa de armadura e pilares com  $\rho_g = 1,5\%$ ,  $e/h = 0,20$  e  $P_u/P_0 = 0,40$ . No entanto após aplicar as equações propostas são calculados novos valores para  $EI_e$  e deve-se verificar se os resultados encontrados apresentam diferenças maiores do que 15% em relação àqueles assumidos inicialmente. Caso isso ocorra é necessário realizar nova análise considerando como rigidez inicial os últimos resultados encontrados.

Segundo o ACI 318-11 o momento de inércia a ser utilizado em análise elástica de segunda ordem (já sem o fator de redução  $\phi_k = 0,875$ ) tem intervalo de valores definido a ser utilizado:

$$\text{Vigas: } 0,29I_g \leq I \leq 0,6I_g ;$$

$$\text{Pilares: } 0,4I_g \leq I \leq 1,0I_g$$

Considerando as recomendações do ACI 318:11, como o  $EI_e$  de vigas variou entre 0,16 e 0,18  $E_c I_g$  o valor final equivalente a ser adotado deve ser 0,29  $E_c I_g$ . Em relação aos pilares os resultados apontam valores que variam entre 0,6 e 0,7  $E_c I_g$ , com algumas exceções para elementos com grande excentricidade e baixa carga axial que conduziram a resultados entre 0,15 e 0,23  $E_c I_g$ . Será adotado o valor de 0,60  $E_c I_g$ , baseado na média dos resultados encontrados.

Analisando as vigas do Edifício Exemplo pode-se perceber que sua baixa taxa de armadura leva a baixos valores de rigidez equivalente, fato comprovado pela base das formulações usadas. Tanto o trabalho de Crespo (2002) como o ACI 318:11 impõem como limite inferior para rigidez equivalente de vigas valores vinculados a taxas de armadura de 0,75% e recomendam praticamente os mesmo valores (0,3 e 0,29 respectivamente). No caso dos pilares as taxas de armadura muito baixas contribuíram para valores reduzidos de rigidez equivalente, associada à excentricidade presente nesses elementos, levando a resultados que não serão considerados, pois a tipologia dos elementos não foi adequada à análise. O resumo dos resultados está na tabela 14.

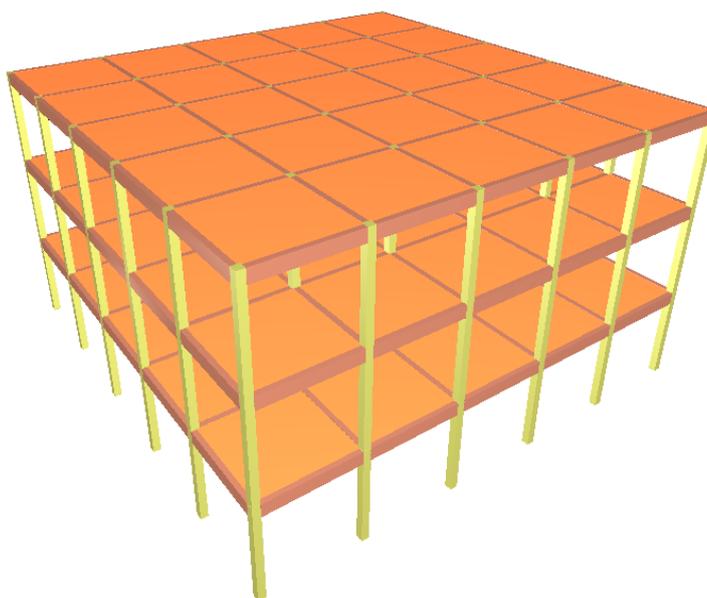
**Tabela 14-** Resumo dos valores de rigidez equivalente determinados para o Edifício Exemplo

	$EI_e / E_c I_g$	
	Vigas	Pilares
Inicial	0,4	0,8
Crespo(2002) / Oliveira (2004)	0,3	–
ACI 318:11	0,29	0,6

### Nova Análise e Dimensionamento da Estrutura

Para comparar com os resultados encontrados foi realizado novo dimensionamento do Edifício Exemplo utilizando a modelagem de pórtico espacial e determinação da rigidez equivalente por análise não-linear mais refinada. O carregamento das lajes foi considerado através do modelo de grelha e os critérios gerais apresentados continuam os mesmos assim como o carregamento adotado com suas combinações.

Para este novo dimensionamento foi utilizado o programa de cálculo estrutural CAD/TQS versão 16.7.3 que possibilita a nova modelagem e análise não-linear pretendida. O Edifício Exemplo modelado como pórtico espacial está representado na Figura 5.



**Figura 5-** Modelo de pórtico espacial do Edifício Exemplo

Na verificação da estabilidade global foi encontrado o valor de  $\gamma_z = 1,07$ , próximo ao 1,06 e 1,05 encontrados na primeira análise, sendo o vento a ação considerada nos cálculos por gerar maior momento na base da edificação do que o momento gerado pela imperfeição geométrica global.

O processo de determinação da rigidez equivalente de forma mais refinada parte da estrutura já dimensionada, ou seja, com geometria e armadura dos elementos estruturais definidas. Nesta nova análise as barras que representam vigas e pilares no pórtico espacial são discretizadas em um número maior de elementos (considerado aqui 0,5m o comprimento máximo para cada segmento) e com isso o pórtico espacial do Edifício Exemplo passou de um modelo com 504 nós e 648 barras para 2520 nós e 2664 barras. Para cada barra, é determinado o diagrama momento-curvatura de onde se obtém o valor da rigidez  $EI$  correspondente. Como foram consideradas duas combinações de carregamento e o vento deve ser aplicado nas duas direções e dois sentidos, é calculada a rigidez  $EI$  para cada combinação, cada direção e cada sentido de vento, resultando em 8 valores de rigidez calculados para cada barra. Pela simetria geométrica e de carregamentos, este cálculo pode ser reduzido para determinação de dois valores apenas: Combinação 01 + vento, Combinação 2+ vento.

Determinados os valores correspondentes de  $EI$  para cada barra, é feita a análise  $P-\Delta$  da estrutura melhor discretizada utilizando os novos valores de rigidez obtidos dos diagramas momento-curvatura ou momento-normal-curvatura. Os resultados finais são novos esforços solicitantes internos e novos deslocamentos para a estrutura. Esta análise indicou que todas as barras passaram, ou seja, o dimensionamento inicial utilizando  $0,4E_{ci}I_c$  para vigas e  $0,8E_{ci}I_c$  para pilares levou a uma solução que atende à análise estrutural mais refinada.

Baseado neste processo é possível obter valores representativos da rigidez de vigas e de pilares. O resultado encontrado para vigas foi de  $0,11EI$  e para pilares  $0,80EI$ , calculado através de valores médios daqueles provenientes da análise de cada elemento.

Para efeito comparativo serão determinados novamente os valores de rigidez equivalente com base nos trabalhos de Khuntia e Ghosh (2004a) e Crespo (2002), relativos ao novo dimensionamento realizado.

Utilizando as recomendações de Crespo (2002) a rigidez equivalente pode ser calculada em função das taxas de armadura dos apoios e do meio do vão, determinando  $\rho_{medio}$ . Os valores encontram-se nas tabelas a seguir.

**Tabela 15-** Determinação da taxa de armadura média para vigas finais 01/ 06/ 07/ 12

V01/V06/ V07 / V12			
VÃO	1	2 / 3/ 4	5
$\rho_{medio}$	0,24%	0,24%	0,24%

**Tabela 16-** Determinação da taxa de armadura média para vigas do tipo finais 02/ 03/ 04/ 05/ 08/ 09/ 10/ 11

V02 /V03 /V04 /V05 /V08 /V09 /V10 /V11				
VÃO	1	2/4	3	5
$\rho_{medio}$	0,31%	0,27%	0,26%	0,31%

**Tabela 17-** Determinação da taxa de armadura média para vigas da cobertura finais 02/ 03/ 04/ 05/ 08/ 09/ 10/ 11

V02/V03/ V04 / V05/ V08/ V09/ V10/ V11			
VÃO	1	2 / 3/ 4	5
$\rho_{medio}$	0,30%	0,26%	0,30%

Como os valores de  $\rho_{medio}$  variaram entre 0,24% e 0,31% a rigidez equivalente de vigas de acordo com o trabalho de Crespo (2002) é  $0,3EI$ .

Utilizando as equações de Khuntia e Ghosh (2004a), são apresentadas as tabelas 18 e 19.

**Tabela 18-** Determinação da rigidez equivalente de vigas de acordo com Khuntia e Ghosh (2004a)

VIGA	PAVIMENTO	$\rho_{critico}$		$b/d$	$EI_e / E_c I_g$
		+	-		
01/06/07/12	TIPO/ COB	0,24%	0,24%	0,43	0,18
02/03/04/05/08/09/10/11	TIPO	0,31%	0,37%	0,43	0,21
02/03/04/05/08/09/10/11	COB	0,31%	0,31%	0,43	0,20

**Tabela 19-** Determinação da rigidez equivalente de pilares de acordo com Khuntia e Ghosh (2004a)

PILAR	LANCE	$\rho_g$	$e/h$	$P_u$ [kN]	$P_0$ [kN]	$P_u/P_0$	$EI_e/E_c I_g$
P1/ P6/ P31/ P36	1	0,55%	0,12	240	1570	0,15	0,65
	2	0,55%	0,18	150	1570	0,10	0,62
	3	0,55%	0,37	57	1570	0,04	0,49
P2/ P5/ P32/ P35	1	0,55%	0,36	119	1570	0,08	0,48
	2	0,55%	0,17	290	1570	0,18	0,59
	3	0,55%	0,11	453	1570	0,29	0,60
P3/ P4/ P33/ P34	1	0,55%	0,11	414	1570	0,26	0,61
	2	0,55%	0,13	261	1570	0,17	0,63
	3	0,55%	0,37	108	1570	0,07	0,48
P7/ P12/ P25/ P30	1	0,55%	0,11	439	1570	0,28	0,60
	2	0,55%	0,17	279	1570	0,18	0,60
	3	0,55%	0,29	114	1570	0,07	0,54
P8/ P11/ P26/ P29	1	0,55%	0,11	822	1570	0,52	0,50
	2	0,55%	0,08	538	1570	0,34	0,60
	3	0,55%	0,12	253	1570	0,16	0,64
P9/ P10/ P27/ P28	1	0,55%	0,12	745	1570	0,47	0,52
	2	0,55%	0,08	487	1570	0,31	0,61
	3	0,55%	0,12	228	1570	0,15	0,64
P13/ P18/ P19/ P24	1	0,55%	0,11	406	1570	0,26	0,61
	2	0,55%	0,13	256	1570	0,16	0,63
	3	0,55%	0,79	106	1570	0,07	0,14
P14/ P17/ P20/ P23	1	0,55%	0,12	751	1570	0,48	0,52
	2	0,55%	0,08	491	1570	0,31	0,61
	3	0,55%	0,12	230	1570	0,15	0,65
P15/ P16/ P21/ P22	1	0,55%	0,12	682	1570	0,43	0,53
	2	0,55%	0,08	446	1570	0,28	0,62
	3	0,55%	0,11	208	1570	0,13	0,66

Da mesma forma que na análise anterior os resultados apontam para  $0,29E_c I_g$  no caso de vigas, devido ao limite inferior do intervalo apresentado no ACI 318:11 e  $0,60E_c I_g$  nos pilares, baseado na média dos resultados encontrados. Ainda foram determinados valores baixos para rigidez equivalente de pilares em situações similares às anteriores, elementos com grande excentricidade e baixa carga axial, com valores como 0,14 e  $0,48 E_c I_g$ .

### Considerações Finais

Com o trabalho realizado pode-se concluir que estudo da rigidez equivalente é essencial pra aplicação dos métodos simplificados da consideração das não-linearidades nas estruturas de concreto armado e o uso destas formulações aproximadas é de fundamental importância na análise estrutural.

O desenvolvimento do Edifício exemplo ilustrou bem como a NLF está inserida nas análises, porém as características geométricas e de carregamento de todos os elementos estruturais deste edifício levaram a baixas taxas de armadura e com isso utilizou-se sempre valores associados ao limite inferior de armaduras.

O resumo dos resultados está apresentado na tabela 20. Os valores encontrados representam valores médios.

**Tabela 20-** Resumo dos valores de rigidez equivalente determinados para o novo dimensionamento do Edifício Exemplo

	$EI_e/E_cI_g$	
	Vigas	Pilares
Inicial	0,4	0,8
Crespo	0,3	-
ACI 318:11	0,29	0,6
Análise NLFG	0,11	0,8

### Agradecimentos

Ao CNPq- Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – pela bolsa de doutorado concedida ao primeiro autor.

À TQS Informática Ltda. pela disponibilização do software ao Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília para desenvolvimento do trabalho e à sua equipe técnica pelo suporte na utilização do programa.

### Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto – Procedimento - NBR 6118, Rio de Janeiro, 2014.  
 AMERICAN CONCRETE INSTITUTE COMMITTEE 318. Building code requirements for structural concrete and commentary. Farmington Hills, MI, 2011.

BUENO, M. M. E. Estudo de valores aproximados de rigidez equivalente para vigas e pilares para análises não-lineares globais em estruturas de concreto armado de pequeno porte. 2014. 251 f. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

CRESPO, S. L. F. Estudo de valores da rigidez equivalente de tramos de vigas de concreto armado para análises não-lineares. 2002. 115 f. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

KHUNTIA, M.; GHOSH, S. K. Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: analytical approach. ACI Structural Journal. Vol 101, n. 3, p. 351-363, May- June 2004a.

KHUNTIA, M.; GHOSH, S. K. Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: experimental verification. ACI Structural Journal. Vol 101, n. 3, p. 364-374, May-June 2004b.

OLIVEIRA, P. H. A. S. Processo aproximado para consideração da não-linearidade física de pilares em concreto armado. 2004. 124 f. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.